ЛЕКЦИЯ № 25

Уравнение Гамильтона-Якоби.

«Теорема Якоби сводит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных. Может показаться удивительным, что такое сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем оказывается, что это – самый сильный из существующих методов точного интегрирования, и многие задачи, решенные Якоби, вообще не поддаются решению другими методами».

В.И.Арнольд

Лучше не скажешь. Действительно, рассмотренный в конце лекции №21 пример с гармоническим осциллятором показал, что решение этой задачи в лагранжевом подходе тривиален, а в подходе Гамильтона-Якоби выглядит сложнее и на первый взгляд непонятно. Вернемся к уравнению Гамильтона – Якоби для действия $S(q,t)$, как функции координат и времени:

$$\frac{\partial S(q_1, q_2, ..., q_s, t)}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, ..., q_s, t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0. \qquad (25.1)$$

Это – нелинейное уравнение в частных производных первого, содержащее только частные производные первого порядка, но не саму функцию. Сам вывод этого уравнения предполагал, что оно описывает гамильтонову систему, для которой справедлива система $2s$ канонических *дифференциальных* уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i. \qquad (25.2)$$

Решение этой системы содержит $2s$ произвольных констант и поэтому обладает $2s$ интегралов движения, которые, вообще говоря, неизвестны. Якоби сформулировал следующую теорему:

Теорема Якоби:

Если известно решение уравнения (25.1), содержащее s независимых произвольных постоянных α_i (так называемый *полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби)*:

$$S = f(q_1, q_2,..., q_s, t; \alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_s), \tag{25.3}$$

то исходные канонические уравнения (25,2) решаются в квадратурах. Они сводятся к системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial f(q,t,\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \qquad \frac{\partial f(q,t,\alpha_i)}{\partial q_i} = p_i, \tag{25.4}$$

где β_i – s произвольных констант. Из первой группы уравнений находим зависимости $q_i = q_i(t, \alpha_i, \beta_i)$, а из второй – зависимости $p_i = p_i(t, \alpha_i, \beta_i)$. Т.е. полученное решение исходной гамильтоновой системы уравнений, как и следует, зависит от $2s$ произвольных констант. При этом вторая группа уравнений, разрешенная относительно констант $\alpha_i = \alpha_i(q, p, t)$ задает s интегралов движения.

Докажем теорему Якоби. Для этого произведем каноническое преобразование от гамильтоновых переменных (p,q) («старых») к «новым» переменным с помощью производящей функции $\Phi(q,P,t)$ (см. лекцию №22), зависящеот старых координат и новых импульсов. При этом в качестве производящей функции выберем полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (25.3) $f(q_i, \alpha_i, t)$, считая константы α_i новыми импульсами. Обозначим новые координаты через β_i. Тогда связь новых и старых координат и импульсов определяется соотношениями (22.17), имеющими в нашем случае вид

$$p_i = \frac{\partial f(q,\alpha,t)}{\partial q_i}, \qquad \beta_i = \frac{\partial f(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}, \qquad H'(\alpha_i, \beta_i, t) = H(p,q,t) + \frac{\partial f(q,\alpha,t)}{\partial t}. \tag{25.5}$$

Но, поскольку функция f есть действие, удовлетворяющее уравнению Гамильтона-Якоби $H + \partial f / \partial t = H + \partial S \partial t = 0$, то

$$H'(\alpha, \beta, t) = 0. \tag{25.6}$$

Оэтому уравнения Гамильтона для новых «координат» β_i и «импульсов» α_i сводятся просто к $\dot{\beta}_i = \partial H' / \partial \alpha_i = 0$ и $\dot{\alpha}_i = -\partial H' / \partial \beta_i = 0$. Отсюда

$$\alpha_i = const, \qquad \beta_i = const. \tag{25.7}$$

Первый результат естественный. Мы исходили из того, что α_i константы полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби. Второе соотношение – новое. Поскольку β_i – константы, то выражение из (25.5)

$$\frac{\partial f(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{25.8}$$

становится системой *алгебраических* уравнений для нахождения зависимостей $q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t)$.

Вернемся к примеру в конце лекции №21, где для гармонического осциллятора было получено выражение для действия (21.16):

$$S(x,t) = \frac{\sqrt{U(x)(E-U)}}{\omega_0} + \frac{E}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{U}{E}} - Et \tag{25.9}$$

с $U = kx^2/2$. Это выражение и соответствует полному интегралу для $f(q,\alpha,t)$, обсуждавшемуся выше. Роль константы α играет энергия E. Дифференцирование S по этой константе (см. (25.8)) дает решение задачи.

Таким образом, знание полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби позволяет легко решить исходную динамическую задачу. Но как найти этот полный интеграл? К сожалению, общего правила для этого нет. Об этом откровенно писал Якоби: «Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никаких правил. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-либо замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена» (Карл Густав Яков Якоби, Лекции по динамике).

Смысл этого высказывания в следующем. Не имея возможности в общем случае найти полный интеграл, мы можем перебирать различные системы координат и в них пытаться найти те уравнения, которые можно решить. Затем в классе этих уравнений надо искать те, которые представляют интерес для физики. Например, как мы покажем ниже, в сферических координатах (r, ϑ, φ) возможно решить уравнение Гамильтона –Якоби для движения частицы в поле

$$U = a(r) + \frac{b(\vartheta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\vartheta}, \tag{25.10}$$

где $a(r)$, $b(\vartheta)$ и $c(\varphi)$ – произвольные функции своих аогументов. Случай $b = c = 0$ был рассмотрен нами ранее в разделе «Движение в центральном поле». Он легко исследуется в лагранжевом подходе. Но класс потенциалов (25.10) более широкий. Например, он содержит потенциал взаимодействия заряда с электрическим дипольным моментом $U = de\cos\vartheta / r^2$. Поэтому эта задача решается методом Гамильтона-Якоби. Но, сдругой стороны, например, задача о движении двух взаимодействующих диполей уже «не вкладывается» в этот перечень решаемых этим методом задач.

Рассмотрим один из способов нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби – так называемый *метод разделения переменных*. С ним мы уже сталкивались в задаче о гармоническом осцилляторе.

Если в уравнении Гамильтона-Якоби (25.1) время не входит явно в гамильтониан, т.е. оно имеет вид

$$\frac{\partial S(q_1, q_2, \dots, q_s, t)}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0, \qquad (25.11)$$

то одна из переменных – время – выделилась в уравнении, содержась только в первом слагаемом (гамильтониан от времени не зависит, но действие – зависит). Т.е. произошло разделение времени и всех остальных координат. Поскольку при этом энергия сохраняется и $H = E$, то действие можно представить в виде

$$S(q_i, t) = -Et + S_0(q_i), \qquad (25.12)$$

где $S_0(q_i)$ – так называемое *укороченное действие* (о котором мы поговорим дальше) удовлетворяет уравнению

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E. \qquad (25.13)$$

Таким образом, мы получили уравнение, содержащее на одну динамическую переменную меньше, но при этом содержащее один произвольный параметр (E).

Рассмотрим возможность такой процедуры в общем случае. Представим уравнение Гамильтона-Якоби в виде

$$\Psi\left(t, q_1, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) = 0 \tag{25.14}$$

и представим, что в этом уравнении одна из координат (например, q_1) вместе с производной от действия по ней $\partial S / \partial q_1$ отделяются, т.е. входят в уравнение единым блоком:

$$\Psi\left(t, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; \varphi_1\left(q_1, \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right)\right) = 0 . \tag{25.15}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$S = S_1(q_1) + S'(q_i, t), \qquad i \neq 1 . \tag{25.16}$$

После подстановки в (25.15) получаем

$$\Psi\left(t, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial t}, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}; \varphi_1\left(q_1, \left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right)\right) = 0 . \tag{25.17}$$

Если q_1 – циклическая переменная, т.е. не входит явно в гамильтониан, а, следовательно, в Ψ и φ_1, то из уравнения Гамильтона $\partial H / \partial q_1 = -\dot{p}_1$ следует сохранение импульса. При этом из соотношения $\partial S / \partial q_1 = p_1$ следует, что $\varphi_1 = \varphi_1(p_1) = const$. Таким образом, в частном соучае циклической переменной q_1 действие сведется к виду

$$S = p_1 q_1 + S'(q_i, t, p_1). \tag{25.18}$$

Эта формула аналогична формулу (25.12) для случая консервативной системы, когда время играет роль циклической переменной. Роль пары $p - q$ играет пара $E - t$.

Рассмотрим более общий случай, когда q_1 не является циклической переменной, но φ_1 остается константой. При этом мы удовлетворим уравнению (25.17), но оно сведется к двум уравнениям:

$$\Psi\left(t, q_2, \ldots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial t}, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}; \alpha_1\right) = 0 , \tag{25.19}$$

$$\varphi_1\left(q_1 \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 . \tag{25.20}$$

Если нам удастся из уравнения (25.20) выделить производную $\partial S_1/\partial q_1$ как функцию q_1: $\partial S_1/\partial q_1 = A(q_1,\alpha_1)$, то мы найдем S_1 в квадратура: $S_1 = \int A(q_1,\alpha_1)dq_1$.

Если удасться таким же образом отделить и остальные пары q_i и $\partial S_i/\partial q_i$, то после приравнивания этих комбинаций константам для всех $i = 1,...,s$ мы получим s независимых уравнений

$$\varphi_i\left(q_i, \partial S_i/\partial q_i, \alpha_p\right) = \alpha_i\,, \tag{25.21}$$

в которые на каждом $i-$том шаге отдления в возникающую функцию φ_i попадут, вообще говоря, константы α_p, возникшие на предыдущих шагах. После решения в квадратурах этих s уравнений получаем выражение для действия

$$S(q_n,t) = \sum_{n=1}^{s} S_n\left(q_n;\alpha_1,...,\alpha_s\right) + S_*\left(t;\alpha_1,...,\alpha_s\right), \tag{25.22}$$

где функция $S_*\left(t;\alpha_1,...,\alpha_s\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S_*}{\partial t} + H\left(t;\alpha_1,...,\alpha_s\right) = 0\,. \tag{25.23}$$

В частном случае консервативной системы действие принимает вид

$$S(q_n,t) = \sum_{n=1}^{s} S_n\left(q_n;\alpha_1,...,\alpha_s\right) - E\left(\alpha_1,...,\alpha_s\right)t\,, \tag{25.24}$$

где каждой циклической координате q_c соответствует слагаемое $p_c q_c$.

Для примера рассмотрим тривиальный случай трехмерного осциллятора: частицы в поле $U(x,y,z) = k\left(x^2+y^2+z^2\right)/2$. Уравнение Гамильтона-Якоби в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+\frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)= \\
&=\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{k}{2}x^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{k}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\frac{k}{2}z^2\right)= \qquad (25.25)\\
&=\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_x(x)}{\partial x}\right)^2+\frac{k}{2}x^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_y(y)}{\partial y}\right)^2+\frac{k}{2}y^2\right)+\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_z(z)}{\partial z}\right)^2+\frac{k}{2}z^2\right)=E,
\end{aligned}$$

где $S(x,y,z)=S_x(x)+S_y(y)+S_z(z)$. Суть метода разделения переменных заключается в том, что мы будем рассматривать только решения, для которых все блоки этого уравнения, зависящие только от своих координат (три скобки в (25.25)), равны константам. Три константы $\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z$ связаны соотношением $E=\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z$. Учитывая результаты задачи из лекции №21, выпишем результат для действия:

$$S(x,y,z,t)=\sum_{n=1,2,3}\left(\frac{\sqrt{U_n(x_n)(\alpha_n-U_n)}}{\omega_0}+\frac{\alpha_n}{\omega_0}\arcsin\sqrt{\frac{U_n}{\alpha_n}}\right)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t \qquad (25.26)$$

с $x_n=x,y,z$ и $U_n(x_n)=kx_n^2/2$. Дифференцируя это выражение по константам α_n и приравнивая результаты постоянным β_n, получаем решение задачи, которую можно было решить и проще. Но рассмотрим более сложный пример.

Продемонстрируем «работу» метода разделения переменных на задачах, решаемых в сферических координатах (r,ϑ,φ). В них для частицы в поле потенциала $U(r,\vartheta,\varphi)$ гамильтониан имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\vartheta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right)+U(r,\vartheta,\varphi), \qquad (25.27)$$

а соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби – вид

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2\right)+U(r,\vartheta,\varphi)=E. \qquad (25.28)$$

Из (25.28) видно, что пременная φ отделится, если потенциал будет иметь слагаемое $U=U_1(r,\vartheta)+c(\varphi)/r^2\sin^2\vartheta$. При этом уравнение (25.28) для $S=S_\varphi+S_{r\vartheta}$ преобразуется к виду

$$\left[\left(\frac{dS_\varphi}{d\varphi}\right)^2+2mc(\varphi)\right]=\left[2m(E-U_1(r,\vartheta))-\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}\right)^2\right]r^2\sin^2\vartheta=\alpha_\varphi, \qquad (25.29)$$

который можно переписать так

$$\left[\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi}{\sin^2\vartheta}+2mU_1(r,\vartheta)r^2\right]=2mr^2E-r^2\left(\frac{\partial S_{r\vartheta}}{\partial r}\right)^2. \qquad (25.30)$$

Из этой записи видно, что уравнение разделится для потенциалов вида $U_{r\vartheta} = b(\vartheta)/r^2 + a(r)$, для которых можно представить $S_{r\vartheta}$ в виде $S_{r\vartheta} = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta)$:

$$\left[\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi}{\sin^2\vartheta} + 2mb(\vartheta)\right] = -2mr^2\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + a(r) - E\right). \qquad (25.31)$$

Итак, в сферических координатах можно найти в квадратурах решения для потенциалов довольно общего вида (25.10), действие для которых имеет вид $S = S_r(r) + S_\vartheta(\vartheta) + S_\varphi(\varphi) - Et$, где S_i удовлетворяют трем *обыкновенным дифференциальным уравнениям*:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\alpha_\vartheta}{2mr^2} - E = 0, \qquad (25.32)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_\vartheta}{d\vartheta}\right)^2 + b(\vartheta) + \frac{\alpha_\varphi}{2m\sin^2\vartheta} - \frac{\alpha_\vartheta}{2m} = 0, \qquad (25.33)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_\varphi}{d\varphi}\right)^2 + c(\varphi) - \frac{\alpha_\varphi}{2m} = 0. \qquad (25.34)$$

Эти уравнения имеют одинаковую структуру: $dS_r/dr = F_r(r, E, \alpha_\vartheta)$, $dS_\vartheta/d\vartheta = F_\vartheta(\vartheta, \alpha_\varphi, \alpha_\vartheta)$ и $dS_\varphi/d\varphi = F_\varphi(\varphi, \alpha_\varphi)$, содержат три константы α_φ, α_ϑ и E, и решаются в квдратурах:

$$S = -Et + \int d\varphi\sqrt{\alpha_\varphi - 2mc(\varphi)} + \int d\vartheta\sqrt{\alpha_\vartheta - 2mb(\vartheta) - \alpha_\varphi/\sin^2\vartheta} + \int dr\sqrt{2m(E - a(r)) - \alpha_\vartheta/r^2}. \qquad (25.35)$$

Дифференцирование этого *полного решения для* S по параметрам α_φ, α_ϑ и E дает решение задачи. Если потенциал не зависит от переменной φ, т.е. $c = 0$, то из (25.34) следует, что $\alpha_\varphi = p_\varphi^2 = M_z^2$.